

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

- Α) Αθλητής του ύψους υπερπηδά στην προπόνηση το ύψος των 225 cm με πιθανότητα $p = 0,35$.
Ποια η πιθανότητα του αθλητή να περάσει το ύψος στην 4η προσπάθεια;
Αν με X συμβολίσουμε τον αριθμό των προσπαθειών πριν περάσει το ύψος, ποια είναι η $E[X]$;
- Β) Ο αθλητής της προηγούμενης άσκησης, βελτίωσε μετά από σκληρή προπόνηση την τεχνική του, με συνέπεια η πιθανότητα υπερπήδησης του ύψους των 225 cm ν' αυξηθεί σε $p = 0,40$.
- α) Ποια η πιθανότητα :
- 1) σε 10 προσπάθειες να έχει 6 επιτυχημένες ;
 - 2) σε 10 προσπάθειες να υπερπηδήσει το ύψος των 225 cm για πρώτη φορά στην έκτη προσπάθεια ;
- β) Αν το πρόγραμμα της προπόνησης περιλαμβάνει 20 προσπάθειες στο ύψος των 225 cm, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχημένων προσπαθειών του αθλητή;
- γ) Ποια η πιθανότητα σε 50 προσπάθειες στο ύψος των 225 cm να έχει 25 επιτυχημένες;

ΛΥΣΗ

Α) Έστω $X =$ πλήθος προσπαθειών μέχρι να περάσει το ύψος και $p = 0,35$ η πιθανότητα (επιτυχίας) να το περάσει.
Άρα, έχουμε ότι $X \sim \text{Geo}(p = 0,35)$ ($f_X(x) = p \cdot q^{x-1}$, $x = 1, 2, \dots$)
Ζητάμε, $P(X = 4) = p \cdot q^{4-1} = 0,35 \cdot 0,65^3 = 0,0961$
 $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,35} = 2,857$

Β) α) 1. Έχουμε $n = 10$ προσπάθειες, με $Y =$ πλήθος επιτυχιών ορίσοντας ως επιτυχία $E = \{ \text{να το περάσει} \}$. Επίσης, έχουμε πιθανότητα επιτυχίας $P(E) = p = 0,4$ σταθερά. Τέλος, η υπόθεση ότι οι προσπάθειες είναι ανεξάρτητες n μια τη μία, μας οδηγεί στο συμπέρασμα διωνυμικής κατανομής.
Άρα, $Y \sim B(10, 0,4)$

$$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^4 = 0,115.$$

2. Έστω $Z =$ πλήθος προσπαθειών μέχρι να το περάσει.
Έχουμε, $Z \sim \text{Geo}(0,4)$

$$P(Z = 6) = 0,6^5 \cdot 0,4 = 0,0311$$

β) Υαχναίμε τωσ αναμενόμενου τιμου σις 20 προσηάθεισ με $p = 0,4$. Άρα, σις δισυνθιική κατανομή $B(20, 0,4)$
 Γνωστί, σι: $E(W) = n \cdot p = 20 \cdot 0,4 = 8$
 όπου $W = \text{πλυθος επιτυχίων σις 20 προσηάθεισ}$

δ) Προφανίς, ζαίναίεκαίμε δισυνθιική κατανομή ($X' \sim B(50, 0,4)$)
 $X' = \text{πλυθος επιτυχίων σις 50 προσηάθεισ}$
 με ακετάβλυτη πιθανόσιτα $p = 0,4$

$$P(X' = 25) = \binom{50}{25} 0,4^{25} \cdot 0,6^{50-25} = 0,0404$$

Γ Στο νερό λίμνης περιέχονται κατά μέσο όρο 500 βακτηρίδια ανά λίτρο. Από βαρέλι καλά ανακατεμένου νερού της λίμνης, εξετάστηκε δείγμα 1 cm^3 ($1 \text{ λίτρο} = 1000 \text{ cm}^3$).

Να βρεθεί:

α) Η πιθανότητα να μην υπάρχουν βακτηρίδια στο δείγμα.

β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 4 βακτηρίδια στο δείγμα.

ΛΥΣΗ

α) 500 βακτηρίδια $\rightarrow 1000 \text{ cm}^3 \Rightarrow \lambda = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

Έστω X ε.μ που παριστά τον αριθμό των βακτηρίδιων σις λίμνη

$X \sim P(\frac{1}{2})$, Άρα $P(X=0) = \frac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^0}{0!} = 0,6065$

β) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x < 4} \frac{e^{-1/2} \cdot (1/2)^x}{x!} = 0,0271$